

文章编号: 1000-7598 (2014)增 2-0662-06

六面体覆盖的高阶数值流形方法的探讨

刘登学, 张友良, 谭 飞, 张礼仁

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 采用高阶近似位移覆盖函数, 基于六面体数学覆盖网格建立了三维数值流形方法分析格式, 给出了相应的子矩阵。利用 MATLAB 编制了与之对应的计算程序, 对简单的地下洞室模型进行了计算, 并将计算结果与其他数值分析方法结果进行了比较, 证明了分析格式及相应程序的正确性和有效性。结果表明, 当数值流形方法的覆盖函数推广到高阶情况时, 其求解精度会有相应的提高。最后, 对该方法在隧道及地下工程的应用前景作了展望。

关 键 词: 数值流形方法; 高阶; 隧道及地下工程

中图分类号: O 302

文献标识码: A

Discussion on high-order numerical manifold method based on hexahedron element

LIU Deng-xue, ZHANG You-liang, TAN Fei, ZHANG Li-ren

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: By introducing two covers, namely, the mathematical cover and physical cover, the numerical manifold method can solve continuous and discontinuous problems in geotechnical engineering in unified way. At present, the application of NMM is mainly limited to two-dimensional analysis which is not realistic for many underground engineering. In this paper, three-dimensional numerical manifold method based on hexahedron element is proposed; and two kinds of high-order displacement functions are used as the cover function. The stiffness matrix, loading matrix, displacement resistance matrix are given according to the cover function; and the methods of handling rank deficiency induced by high degree polynomials as local approximation is discussed. Corresponding program is made by Matlab. One simple example is calculated by the program and the numerical results, being compared with the result of other methods, proves its correctness and effectiveness. It shows that the solution accuracy of numerical manifold method will be improved, when high-order displacement function is used. An example of underground chamber is also presented. Finally, the prospects of the method in tunnel and underground engineering are given.

Key words: numerical manifold method; high-order; tunnel and underground engineering

1 引 言

数值流形方法是石根华^[1-2]在不连续分析方法 (DDA) 基础上提出的, 是利用“流形”数学概念的有限覆盖技术建立起来的统一解决连续与非连续变形问题的数值方法, 连续体的有限元方法 (FEM) 和块体系统的非连续变形分析方法 (DDA), 只是这一数值方法的特例。这种方法采用 2 个网格体系 (物理网格和数学网格) 分析问题, 在分析域内的物理覆盖上建立一般覆盖位移函数加权求和形成总

体位移函数。当流形方法的覆盖函数推广到高阶情况时, 其求解精度将会有很大的提高。

目前二维流形方法的理论已经比较完善, 而且国内许多学者也将该理论应用到了隧道的开挖模拟中^[3-5], 并取得了很好的效果, 如王水林等^[16]、郑宏等^[7]利用数值流形方法进行了二维裂纹扩展问题的研究。然而, 实际的隧道和地下工程问题都是三维问题, 任何计算方法最终都应该发展成为三维并服务于工程实际, 近些年来, 国内外部分学者围绕三维数值流形方法理论及应用做了大量的工作。姜

收稿日期: 2014-03-27

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (No. 11272330); 国家重点基础研究计划 (973 计划) 项目 (No. 2014CB047100)。

第一作者简介: 刘登学, 男, 1991 年生, 硕士研究生, 主要从事数值计算方面的研究。E-mail: liudengxue123@sina.cn

清辉^[8-11]等基于四面体覆盖网格建立了 0 阶及高阶的三维数值流形分析格式, 还成功模拟了三维无压渗流问题, 也对三维数值流形方法的点面接触模型进行了研究。郑榕明等^[12]对基于六面体覆盖的 0 阶三维数值流形方法进行了探讨。何磊等^[13]将三维数值流形方法应用到裂隙岩质边坡的稳定性分析中。郭旭阳等^[14]、林毅峰等^[15]研究了高阶数值流形方法中存在的线性相关问题。

本文在六面体有限元覆盖的三维流形方法基础上, 分别采用完全一阶近似位移覆盖函数和二阶近似位移函数, 建立相应的分析格式, 分析了高阶数值流形法中线性相关问题, 编制了相应的程序, 并对该方法在隧道与地下工程应用做了简单的分析和展望。

2 基本理论

2.1 权函数与位移函数

采用 8 节点六面体有限元网格作为数学覆盖网格, 取六面体有限单元的形函数 $N_i (i=1\sim 8)$ 作为权函数, C8 型等参单元的形函数可以表示为

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (1)$$

式中: ξ_i 、 η_i 、 ζ_i 为六面体第 $i (i=1\sim 8)$ 个顶点在局部坐标系 (ξ, η, ζ) 中对应的坐标值。

采用两种不同的局部近似函数: (1) $\{1, x, y, z\}$; (2) $\{1, x^2, y^2, z^2\}$, 完全一阶近似位移函数带来的线性相关问题将在后面部分讨论。两种不同近似函数对应的物理覆盖 i 的位移函数可表示为

$$\begin{Bmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{i12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{i12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

本文采用 8 节点六面体有限元网格作为数学覆盖, 一个流形单元由 8 个物理覆盖 (节点) 组成, 流形单元的位移函数有 8 个物理覆盖的位移函数加权平均, 可表示为

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [T_{e(i)}][D_{e(i)}] = [T_e][D_e] \quad (4)$$

式中:

$$[T_{e(i)}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & xN_i & 0 & 0 & yN_i & 0 & 0 & zN_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & xN_i & 0 & 0 & yN_i & 0 & 0 & zN_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & xN_i & 0 & 0 & yN_i & 0 & 0 & zN_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

或

$$[T_{e(i)}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & x^2N_i & 0 & 0 & y^2N_i & 0 & 0 & z^2N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & x^2N_i & 0 & 0 & y^2N_i & 0 & 0 & z^2N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & x^2N_i & 0 & 0 & y^2N_i & 0 & 0 & z^2N_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[D_{e(i)}] = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad \cdots \quad d_{i12}]^T \quad (7)$$

2.2 三维流形单元的刚度矩阵

对于流形方法, 刚度矩阵的积分区域为流形单元, 与有限元一样单元应变可根据几何方程求出:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [B_{e(i)}][D_{e(i)}] = [B_e][D_e] \quad (8)$$

式中:

$[B_{e(i)}] =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial y} & \frac{\partial(xN_i)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial y} & \frac{\partial(yN_i)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial y} & \frac{\partial(zN_i)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial z} & \frac{\partial(xN_i)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial z} & \frac{\partial(yN_i)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial z} & \frac{\partial(zN_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial(xN_i)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(xN_i)}{\partial x} & \frac{\partial(yN_i)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(yN_i)}{\partial x} & \frac{\partial(zN_i)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(zN_i)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

类似的可以写出局部近似函数为 $\{1, x^2, y^2, z^2\}$ 的应变矩阵。

由单元 e 弹性应力产生的应变能为

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \iiint_v \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_v \{D_e\}^T [B_e]^T \{E\} [B_e] \{D_e\} dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \{D_e\}^T \iiint_v [B_e]^T \{E\} [B_e] |J| d\xi d\eta d\zeta \{D_e\} \quad (10) \end{aligned}$$

式中: J 为雅克比矩阵; $\{E\}$ 为弹性矩阵。则单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} &\iiint_v [B_{e(r)}]^T \{E\} [B_{e(s)}] |J| d\xi d\eta d\zeta \rightarrow \\ &[K_{e(r)e(s)}] \quad r, s=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (11) \end{aligned}$$

2.3 荷载及固定约束子矩

2.3.1 点荷载矩阵

点荷载 $(F_x, F_y, F_z)^T$ 作用在单元 e 中得点 (x_0, y_0, z_0) 上, 则对应的点荷载矩阵为

$$\begin{aligned} &[T_{e(r)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{e(r)}\}, \\ &(r=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: (ξ_0, η_0, ζ_0) 为 (x_0, y_0, z_0) 在局部坐标系中对应的坐标值。

2.3.2 体积荷载矩阵

设 $(f_x, f_y, f_z)^T$ 是不变的体积力, 它作用在单元 e 的材料体积内, 则体积力引起的荷载矩阵为

$$\begin{aligned} &\iiint_v [T_e(\xi, \eta, \zeta)]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{e(r)}\}, \\ &(r=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned} \quad (13)$$

2.3.3 固定约束矩阵

假定固定点是在单元 e 的 (x_0, y_0, z_0) 上, 沿 xyz 方向分别设置弹簧, 弹簧的刚度为 p , 则对应的位移约束矩阵为

$$\begin{aligned} &p[T_{e(r)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]^T [T_{e(s)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)] \rightarrow [K_{e(r)e(s)}], \\ &(r, s=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned} \quad (14)$$

式中: (ξ_0, η_0, ζ_0) 为 (x_0, y_0, z_0) 在局部坐标系中对应的坐标值。

2.4 等参坐标与整体坐标的相互映射

因本文采用 C8 型等参单元中的形函数作为三维流形单元的权函数, 势必必要涉及坐标的变换。等参坐标到整体坐标的一一对应关系为

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i; y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i; z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (15)$$

式中: x_i, y_i, z_i 为六面体结点在总体 (笛卡尔) 坐标内的坐标值。

N_i 对于 x, y, z 的偏导数可利用自然坐标显示, 表示为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

本文数学覆盖网格采用的是规则的六面体, 因而整体坐标中任意一点 (x, y, z) 在等参坐标中对应的 (ξ, η, ζ) 可以通过式 (17) 表示:

$$\xi = \frac{x-x_0}{a} + \frac{1}{2}; \eta = \frac{y-y_0}{b} + \frac{1}{2}; \zeta = \frac{z-z_0}{b} + \frac{1}{2} \quad (17)$$

式中: x_0, y_0, z_0 为流形单元所对应的 8 个物理覆盖

(节点)形成的六面体的中心坐标; a 、 b 、 c 为数学覆盖网格的三个方向的尺寸大小。

3 高阶数值流形法的线性相关问题

数值流形法中,当局部函数采用不低于一阶的多项式时会导致总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 的过分亏秩,即使在引入位移边界消除了模型的刚体位移后, $\mathbf{K}$ 仍然是亏秩的,即所谓的线性相关问题。线性相关会导致平衡方程的解不惟一,但在物体施加完整的位移约束后,每个解所对应的位移是惟一的^[16]。此外,林毅峰、朱合华等还发现,采用完全一次多项式局部近似函数虽然线性相关,但求解仍然收敛,且精度高于线性无关的单元;近似函数为 $\{1, x^2, y^2, z^2\}$ 的流形方法形成的整体刚度矩阵在施加位移边界条件后满秩^[15]。

针对完全一阶近似位移函数导致的线性相关问题,本文在求解平衡方程时采用郭朝旭等提出的改进的LDLT算法^[14],稳定的求出方程的一组特解。

4 算例

本文采用MATLAB软件基于所建立的分析格式,编制了相应的计算程序,并对2个算例进行了验证。

算例1. 计算模型左端固定,右端受到大小为1 kPa的均布荷载,模型尺寸为4 m×2 m×2 m,物体材料常数: $E=1$ GPa, $\nu=0.25$,不考虑物体的重力。算例1的计算模型如图1所示。采用如图2所示的数学覆盖网格,因此模型为连续体流形单元的物理覆盖数等于有限元的节点数,共生成16个流形单元,45个物理覆盖(节点)。图3为物体沿 x 方向的位移。

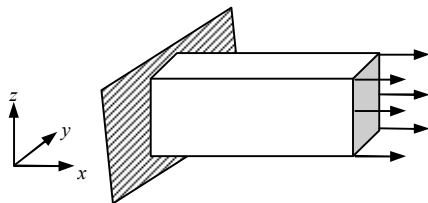


图1 物理计算模型

Fig.1 Physical computational model

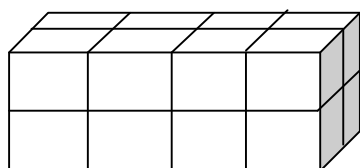


图2 数学覆盖网格

Fig.2 Mathematical covers for numerical problem

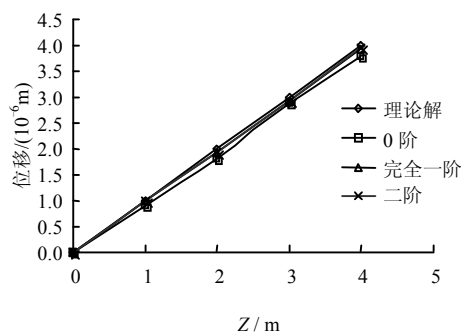


图3 物体 x 方向的位移

Fig.3 Displacement in x direction

从图3可以看出,采用0阶近似位移函数时,计算结果与理论解有一定的误差;采用完全一阶近似函数时,刚度矩阵的亏秩数量为107,利用修正的LDLT算法稳定的得出了一组特解,计算结果能很好的逼近理论解;采用 $\{1, x^2, y^2, z^2\}$ 二阶近似函数时,求解没有出现线性相关问题,结果也能很好地逼近理论解,但计算量及计算时间显著增加,该结果也验证了本程序的正确性。

算例2. 大小为7 m×6 m×6 m矩形物体,中间有一个1 m×1 m×6 m的矩形孔洞,物体下端,左右端固定,计算模型见图4。材料常数: $E=2$ GPa, $\nu=0.4$, $\rho=2000$ kg/m³。采用如图5所示的数学覆盖网格,共生成252个流形单元,392个物理覆盖(节点)。

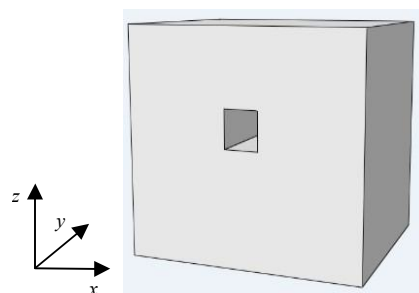


图4 物理计算模型

Fig.4 Physical computational model

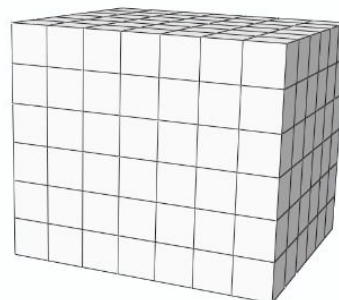


图5 数学覆盖网格

Fig.5 Mathematical covers for numerical problem

图 6 为在自重应力作用下矩形孔洞两侧 ($x = 3 \text{ m}$ 或 4 m) 的竖向 (z 方向) 的位移曲线。当局部近似函数采用完全一阶时, 整体刚度矩阵的秩为 4 149, 亏秩数量为 555; 当采用 $\{1, x^2, y^2, z^2\}$ 的二阶局部近似函数时, 整体刚度矩阵的秩为 4 704, 满秩。从图可以看出, 采用高阶的三维数值流形方法对该问题的模拟计算结果与采用 ABAQUS 等有限元的模拟计算结果基本一致。算例 2 通过对简单地下洞室模型的计算, 表明三维高阶数值流形方法在计算该方面的问题时是可行的。

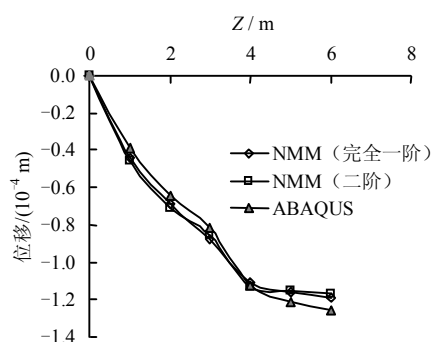


图 6 孔洞两侧的竖向位移

Fig.6 The vertical displacement along the side of the hole

5 结 语

本文基于六面体的数学覆盖网格, 建立了高阶的三维数值流形方法分析格式, 利用 MATLAB 编制了相应的计算程序。通过对算例 1 的计算, 验证了所编制的计算程序的正确性, 其计算结果还表明高阶的数值流形方法相对于 0 阶的流形方法有更高的精度。算例 2 通过对简单地下洞室模型的计算, 验证了三维高阶数值流形方法在计算地下洞室变形方面的有效性。

在隧道及地下工程分析中必需控制求解精度, 在数值流形法中则通过控制数学覆盖的网格的稀疏和覆盖位移的阶数来达到精度的要求。隧道和地下工程不可避免的会存在大量的节理裂隙, 数值流形法中由于采用 2 套独立覆盖系统, 在不连续面处采用非连续的覆盖函数, 可实现对不连续、大变形问题的分析。数值流形方法在隧道及地下工程的应用前景是可预见的。

参 考 文 献

- [1] SHI G H. Manifold method[C]//Proc. of the 1st Int. Forum on DDA Simulation of Discontinuous Media. Bekerley: [s.n.], 1996: 52—204.
- [2] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 北京:

清华大学出版社, 1997.

- [3] 焦健, 乔春生, 徐干成. 开挖模拟在数值流形方法中的实现[J]. 岩土力学, 2010, 31(9): 2951—2957.
- JIAO Jian, QIAO Chun-sheng, XU Gan-cheng. Simulation of excavation in numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(9): 2951—2957.
- [4] 曹文贵, 苏永华, 程晔. 开挖模拟的数值流形分析方法研究[C]//第八次全国岩石力学与工程学术大会论文集. 北京: 科学出版社, 2004.
- [5] 朱爱军, 邓安富, 曾祥勇. 数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 179—183.
- ZHU Ai-jun, DENG An-fu, ZENG Xiang-yong. Numerical manifold method for simulation of excavation unloading in geotechnical engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(2): 179—183.
- [6] 王水林, 葛修润. 流形方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405—410.
- WANG Shui-lin, GE Xiu-yun. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1997, 16(5): 405—410.
- [7] ZHENG H, XU D D. New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2014, 97(13): 986—1010.
- [8] 姜清辉, 周创兵. 四面体有限单元覆盖的三维数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4455—4460.
- JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method with tetrahedron finite element covers[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(24): 4455—4460.
- [9] 姜清辉, 邓书中, 周创兵. 三维高阶数值流形方法研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1471—1474.
- JIANG Qing-hui, DENG Shu-shen, ZHOU Chuang-bing. Study of three-dimensional high-order numerical manifold method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(9): 1471—1474.
- [10] JIANG Q H, DENG S S, ZHOU C B, et al. Modeling unconfined seepage flow using three-dimensional numerical manifold method[J]. **Journal of Hydrodynamics**, 2010, 22(4): 554—561.